Probabilidades y Estadística (C)

Ejercicio 1

Consideremos una muestra $X_1, \dots, X_n$ de v.a.i.i.d. con función de densidad dada por

$$f_X(x,\tau) = \frac{1}{2\tau} e^{-\frac{|x|}{\tau}}$$

Con $\tau > 0$.

a) Hallar el estimador de momentos de τ.
b) Hallar el estimador de máxima verosimilitud de τ.
c) Hallar el estimador de máxima verosimilitud de $3\tau^2 + 8$.
d) Se tiene la siguiente muestra de números provenientes de esta distribución

$$0.7131924 \quad 4.0638882 \quad 13.3933547 \; -0.6217072 \; 1.4178991$$
$$-7.3173815 \; 0.4576039 \; -7.8020672 \; 0.6879150 \; -0.7883506$$

¿Cómo estimaría τ?

Ejercicio 2

Consideremos una m.a. de $X_1, \dots, X_n$ de v.a.i.i.d. con función de densidad dada por

$$f_X(x,\theta) = \frac{3\theta^3}{x^4} I_{(\theta,+\infty)}(x)$$

Con $\theta > 0$.

a) Hallar el estimador de máxima verosimilitud de θ.
b) Hallar el estimador de momentos de θ.
c) Hallar el EMV de $\beta = \ln(\theta)$.

Ejercicio 3

Sea $X_1, \dots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución con densidad

$$f(x;\alpha) = \frac{1}{\alpha} x^{-\frac{1}{\alpha}-1} I_{(1,+\infty)}(x) \qquad \alpha > 0$$

a) Hallar el estimador de máxima verosimilitud de α.
b) Decidir si el estimador hallado es insesgado o no. ¿Es este estimador consistente?
c) Suponiendo que $\alpha = 2$, hallar n que garantice que

$$P\left(e^{-n} \le \prod_{i=1}^{n} X_i \le e^{5n}\right) \ge 0.99$$

Sugerencia: Considere la distribución de $Y = \ln(X)$.

d) Suponer además $\alpha < 1$ y hallar el estimador de momentos de α.